www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

PREMIÈRE PARTIE

Pour tout réel α on définit la fonction f_α par : $f_\alpha(u) = \dfrac{u^\alpha}{\sqrt{1-u}}$ $\quad 0 < u < 1$.

1. Étude de la fonction f_α :

   a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_α.

   b. Calculer $f_\alpha'(u)$ et en déduire selon α le tableau de variation.

   c. Étudier la fonction f_α au voisinage des bornes 0 et 1 (limite et demi-tangente éventuelle).

   d. Construire sur un même graphe les courbes correspondant à

   $$\alpha = -1, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = 0{,}5, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 2.$$

2. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^\alpha \, du}{\sqrt{1-u}}$ converge.

   On note alors J_α la valeur de cette intégrale.

3. Calculer J_α pour $\alpha = 0$ et $\alpha = -0{,}5$.
   Déterminer une relation de récurrence entre J_α et $J_{\alpha+1}$.
   $\left\{\text{On utilisera l'égalité } u^{\alpha+1} = u^\alpha \cdot u = u^\alpha(1-(1-u)) \text{ et on intégrera par parties } \displaystyle\int_0^1 u^\alpha \sqrt{1-u}\, du\right\}$.

4. Soit $I_n = J_{\frac{n}{2}-1}$, n étant élément de $\mathbb{N}^*$.
   Montrer que :

   si n est pair $\quad I_n = 2\dfrac{4^{k-1}|(k-1)!|^2}{(2k-1)!}$ avec $n = 2k$

   si n est impair $\quad I_n = \pi\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$ avec $n = 2k+1$.

5. Soit x un réel strictement positif.

   Soit $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{x-u}}\, du$. n étant élément de $\mathbb{N}$.

   Montrer que $I_n(x) = x^{\frac{n}{2}-1} \cdot I_n$.

DEUXIÈME PARTIE

1. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
   Soit les variables aléatoires $Y = X^2$ et $Z = \sqrt{Y}$.

   a. Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires absolument continues et calculer leurs densités en fonction de f.

Tournez la page S.V.P.

b. Déterminer de deux façons différentes la densité de Z en fonction de celle de Y.

2. On prend pour X une loi normale réduite centrée.

a. Vérifier que la densité de Y est :

$$g(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x > 0 .$$

b. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

c. Déterminer la densité et l'espérance de Z.

3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on choisit un point de coordonnées (X, Y) tel que X et Y suivent deux lois normales réduites centrées indépendantes.

Soit (R, θ) $(R \geqslant 0 ; \theta \in [0, 2\pi[)$ un système de coordonnées polaires du point.
On pose : $S = R^2 = X^2 + Y^2$.

a. Montrer que la densité de S est $\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ pour $x > 0$.

b. En déduire l'espérance de S.

c. Déterminer la loi et l'espérance de R et de θ.

d. Prouver que les variables aléatoires R et X ne sont pas indépendantes. (Cette question est sans incidence sur la troisième partie).

TROISIÈME PARTIE

Soit X_n une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes et suivant une loi normale réduite centrée.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ la somme des carrés des n premiers termes de la suite.

On notera f_n la densité de S_n.

1. Démontrer par récurrence que f_n est donnée par la formule :

$$f_n(x) = k_n e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \text{ pour tout } x > 0, \text{ où } k_n \text{ est une constante.}$$

Calculer k_{n+1} en fonction de k_n et I_n.

2. Calculer k_n en fonction de n.

3. Donner le graphe de la fonction f_n pour $n = 1, 2, 3$.

4. Soit $R_n = \sqrt{S_n}$. Déterminer la densité de R_n et calculer son espérance.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail